Dans tous ces exercices, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. : Dire dans quel $\mathbb{K}$ –espace vectoriel sont inclus les ensembles suivants (il faut préciser $\mathbb{K}$ dans certains cas). En sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a. $\mathbb{Z}$

b. $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$

c. $\left\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \ / \ x = 0\right\}$

d. $\left\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \ / \ x \neq 0\right\}$

e. $\left\{(x,1) \ / \ x \in \mathbb{K}\right\}$

f. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x = y\right\}$

g. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x \neq y\right\}$

h. $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \ / \ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0\right\}$

i. $SMag_2(\mathbb{K}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \ / \ \begin{aligned} a+b &= c+d \\ &= a+c \\ &= b+d \end{aligned}\right\}$ (ensemble des matrices ”semi-magiques” d’ordre 2).

j. $Mag_2(\mathbb{K}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \ / \ \begin{aligned} a+b &= c+d \\ &= a+c \\ &= b+d \\ &= a+d \\ &= b+c \end{aligned}\right\}$ (ensemble des matrices ”magiques” d’ordre 2).

k. $Mag_3(\mathbb{K}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \ / \ \begin{aligned} & a+b+c = d+e+f = g+h+i \\ & = a+d+g = b+e+h = c+f+i \\ & = a+e+i = c+e+g \end{aligned}\right\}$

l. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \left\{(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \ \forall i,j \ a_{ij} = a_{ji}\right\}$ (matrices symétriques).

m. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \left\{(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \ \forall i,j \ a_{ij} = -a_{ji}\right\}$ (matrices antisymétriques).

n. $\mathcal{P} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ est paire}\right\}$

o. $\mathcal{I} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ est impaire}\right\}$

p. $\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ polynomiale et } \deg f = n\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$

q. $\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ polynomiale et } \deg f \leqslant n\right\}$ (noté $\mathcal{P}_n(\mathbb{R},\mathbb{R})$)

r. $F = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f(1) = 0\right\}$

s. $G = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f(1) = 1\right\}$ (mais c’est un *translaté* du précédent)

t. $F = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f' = f\right\}$ (montrer que $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$)

u. $F = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'' = -f\right\}$ (montrer que $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$)

v. $\mathcal{P}_T = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ est périodique de période } T\right\}$

w. $\mathcal{P} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ est périodique}\right\}$

x. $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ est périodique de période rationnelle} \right\}$
y. $F = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \exists g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \ g \text{ et } h \text{ croissantes} \ / \ f = g - h \right\}$
z. : On fixe $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; $F_g = \left\{ f.g \ / \ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \right\}$ (on pourra remarquer que F_g n'est autre que l'ensemble des applications qui s'annulent aux points où g s'annule).
aa. $\left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n) \text{ est arithmétique} \right\}$
bb. $\left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n) \text{ est géométrique} \right\}$
cc. $\left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \right\}$
dd. $\left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n) \text{ est convergente} \right\}$
ee. $\left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \lim u_n = 0 \right\}$
ff. $\left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \lim u_n = 1 \right\}$ (mais c'est un *translaté* du précédent)
gg. $\left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n) \text{ est bornée} \right\}$

2. : Dans les cas c), f), i), j), k) ,l) , m), q), t), u) , aa), cc), de l'exercice précédent, déterminer une base du sev correspondant.

3. : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.
a. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de $\mathbb{E}$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
b. En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

4. : Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. On pose

$$A = F \cap (G + H) \ ; B = (F \cap G) + (F \cap H)$$

a. Montrer que $B \subset A$, mais que l'inclusion peut être stricte.
b. Montrer que si F contient G ou H, alors $A = B$.
c. Montrer que $B = F \cap (G + (F \cap H))$.
d. Montrer que $\begin{cases} F \cap G = F \cap H \\ F + G = F + H \\ G \subset H \end{cases} \Rightarrow G = H$
e. Etudier les inclusions entre $C = F + (G \cap H)$ et $D = (F + G) \cap (F + H)$.
f. **Montrer que si $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$, les deux autres égalités similaires sont réalisées, ainsi que les trois égalités du type : $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$.

5. :
a. Déterminer un système d'équations cartésiennes du sous-espace F de $\mathbb{K}^4$ engendré par

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

b. Déterminer une famille engendrant le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^5$ dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + 5u = 0 \\ x + y = z + t = u \end{cases}$

Rep : (a) $\begin{cases} 8x - 6y - 7z = 0 \\ 5x - 9y + 7t = 0 \end{cases}$ (b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

6. : Montrer que $(\exp, x \mapsto xe^x, x \mapsto xe^x \ln x, x \mapsto x \ln x, x \mapsto x, \ln)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{]0,+\infty[}$.

7. : Les familles de Van der Monde ;

- **a.** On donne dans $\mathbb{K}^3$ les vecteurs $(1, a, a^2), (1, b, b^2), (1, c, c^2)$; à quelle CNS portant sur a, b, c forment-ils une famille libre ?
- **b.** Idem pour $(1, 1, 1), (a, b, c), (a^2, b^2, c^2)$.
- **c.** * Généraliser.

8. :

- **a.** Soient a, b, c trois éléments de $\mathbb{K}$ distincts. Montrer que $((a^n), (b^n), (c^n))$ est une famille libre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- **b.** * Généraliser.

9. * : On donne

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2} + x}; f_2 : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2} - x}; f_3 : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2} + 1}; f_4 : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2} - 1}$$

- **a.** Déterminer le rang de (f_1, f_2, f_3, f_4) dans $\mathbb{R}^{[0,+\infty[}$ (indication : $1 + \mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}^2$ ou bien calculer $(f_1 \pm f_2)^2$).
- **b.** Déterminer le rang de (f_1, f_2, f_3, f_4) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

10. * :

- **a.** Démontrer que $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_p})$ est libre si et seulement si

$$\forall i \in [|1, p|] \quad \overrightarrow{x_i} \notin \mathrm{Vect}\Big((\overrightarrow{x_j})_{1 \leqslant j < i}\Big)$$

Remarque : $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

- **b.** : Démontrer que $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_p})$ est liée si et seulement si

$$\exists i_0 \in [|1, p|] \ / \ \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{x}_1, \dots, \overset{\vee}{\overrightarrow{x}}_{i_0}, \dots, \overrightarrow{x}_p\right) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_p}).$$

11. * : Démonstration du théorème (fort) de la base incomplète :
Soit $\mathcal{G} = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_m})$ une famille génératrice de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{L} = \left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}\right)$ une famille libre de $\mathbb{E}$.
On rappelle que la réunion de deux listes est leur mise bout à bout ; par exemple : $(a, b) \cup (c, d) = (a, b, c, d)$.

- **a.** Montrer que si $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice, il existe un élément $\overrightarrow{\varepsilon_i}$ de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{L} \cup (\overrightarrow{\varepsilon_i})$ soit encore libre.
- **b.** En déduire qu'il existe une sous-famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ soit une base de $\mathbb{E}$.
- **c.** : Illustration de ce théorème ; on considère les vecteurs de $\mathbb{K}^4$ définis par :

$$a=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix};b=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix};c=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix};d=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{pmatrix};e=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix};f=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix};g=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

i. Montrer que $\mathcal{L}=(a,b)$ est libre et que $\mathcal{G}=(c,d,e,f,g,h)$ est génératrice.

ii. Compléter $\mathcal{L}$ en une base de $\mathbb{K}^4$ en puisant dans $\mathcal{G}$.

12. : Déterminer les rangs r des familles suivantes de $\mathbb{K}^4$ et les $4-r$ relations entre les vecteurs de chaque famille.

a. $\mathcal{F}_1=\left(a=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};b=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix};c=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\3\end{pmatrix};d=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

b. $\mathcal{F}_2=\left(a=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix};b=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix};c=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix};d=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$

c. $\mathcal{F}_3=\left(a=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix};b=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\end{pmatrix};c=\begin{pmatrix}4\\3\\-4\\0\end{pmatrix};d=\begin{pmatrix}1\\2\\-6\\-5\end{pmatrix}\right)$

13. : Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$ du $\mathbb{C}$-espace $\mathbb{C}^4$ et éventuellement les relations entre les vecteurs de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}=\left(a=\begin{pmatrix}1\\i\\1+i\\-i\end{pmatrix};b=\begin{pmatrix}-i\\0\\2-i\\1+i\end{pmatrix};c=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2+i\end{pmatrix};d=\begin{pmatrix}1-i\\1+i\\2\\-1-i\end{pmatrix}\right)$$

quel est le rang de $\mathcal{F}$ dans le $\mathbb{R}$ –espace $\mathbb{C}^4$?

14. : Soient les vecteurs de $\mathbb{K}^3$:

$$a=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix};b=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};c=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix};x=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}=(a,b,c)$; est-ce une base de $\mathbb{K}^3$? Si oui, donner les coordonnées de x dans cette base.

15. : Soit $F=\mathrm{Vect}(a,b,c)$ et $G=\mathrm{Vect}(d,e)$ avec :

$$a=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix};b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix};c=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix};d=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix};e=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}$$

a. Déterminer les dimensions de $F,\ G,\ F+G,\ F\cap G$.

b. Déterminer une base de $F\cap G$.
Réponse : (d).

16. : On considère les vecteurs de $\mathbb{K}^5$ suivants :

$$a=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix};b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix};c=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}d=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix};e=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

et on pose $\mathrm{Vect}(a,b,c)=F,\mathrm{Vect}(d,e)=G$.

a. Montrer que $\mathbb{K}^5=F\oplus G$.

b. Déterminer un système d'équations cartésiennes de F et de G.

c. Donner les expressions analytiques des deux projections p et q associées à cette décomposition de $\mathbb{K}^5$, c'est-à-dire, si $p\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\\u'\end{pmatrix}$, les expressions de x',y',z',t',u' en fonction de x,y,z,t,u et de même pour q.

17. : Soit I un ensemble fini. Déterminer une base et la dimension de $\mathbb{K}^I$.
Même chose pour $\mathbb{E}^I$ où $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension finie.

18. * : soit $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$; A est dite *centrosymétrique* si :

$$\forall i,j\quad a_{i,j}=a_{n+1-i,n+1-j}$$

Montrer que l'ensemble $\mathfrak{CS}_n(K)$ des matrices centrosymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, en donner une base et la dimension (on séparera les cas n pair et n impair).

19. * : Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{C}$ –espace vectoriel ; $\mathbb{E}$ peut aussi être muni d'une structure de $\mathbb{R}$ –espace vectoriel, en restreignant l'opération externe $\mathbb{C}\times\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ à $\mathbb{R}\times\mathbb{E}\to\mathbb{E}$.

a. Montrer qu'une famille finie liée sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$ –liée) est $\mathbb{C}$ –liée, mais que la réciproque est fausse. Qu'en déduit-on pour les familles libres ?

b. Une famille finie $\mathbb{R}$ –génératrice est-elle $\mathbb{C}$ –génératrice ?

c. Une famille finie $\mathbb{C}$ –génératrice est elle $\mathbb{R}$ –génératrice ?

d. Montrer que si $\left(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}\right)$ est une $\mathbb{C}$ –base de $\mathbb{E}$, alors $\left(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n},i\overrightarrow{e_1},\dots,i\overrightarrow{e_n}\right)$ est une $\mathbb{R}$ –base de $\mathbb{E}$. En déduire une relation entre la $\mathbb{R}$ –dimension de $\mathbb{E}$ et sa $\mathbb{C}$ –dimension.

e. Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de $\mathbb{E}$, démontrer que $\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})\leqslant\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})\leqslant 2\times\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})$.

Correction

a) $(1,i)$ est $\mathbb{C}$-liée car $i.i+1=0$ mais elle est $\mathbb{R}$-libre. Une famille $\mathbb{C}$-libre est $\mathbb{R}$-libre.

b) Oui car tout réel est un complexe.

c) Non : (1) est $\mathbb{C}$-génératrice de $\mathbb{C}$ mais pas $\mathbb{R}$-génératrice.

d) l'idée est qu'une $\mathbb{R}$-combinaisosn de$(e_1,\ldots,e_n,ie_1,..,ie_n)$ est une $\mathbb{C}$-combinaison de $(e_1,..,e_n)$. Donc $\dim_{\mathbb{R}}(E)\geqslant 2\dim_{\mathbb{C}}(E)$.

e) Soit $F = vect_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})$; $\mathcal{F}$ contient une $\mathbb{C}$-base $(e_1,..,e_r)$ de F, qui est $\mathbb{R}$-libre : donc $r = rg_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) \leqslant rg_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$.

$(e_1,\ldots,e_r,ie_1,..,ie_r)$ est une $\mathbb{R}$-base de F , donc $\dim_{\mathbb{R}}(F) = 2r.$ Or $vect_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$ est inclus dans $vect_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})$ donc $rg_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}) \leqslant 2r$.

20. * :

a. Si $(f_1,\ldots,f_n)$ est libre dans le $\mathbb{C}$ –espace $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, $(\mathrm{Re}(f_1),\ldots,\mathrm{Re}(f_n))$ est elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

b. Montrer que si $(f_1,\ldots,f_n,\overline{f_1},\ldots,\overline{f_n})$ est $\mathbb{C}$ –libre, alors $(\mathrm{Re}(f_1),\ldots,\mathrm{Re}(f_n),\mathrm{Im}(f_1),\ldots,\mathrm{Im}(f_n))$ est $\mathbb{R}$ –libre.

c. Soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ des nombres complexes distincts. Montrer que $(x\mapsto e^{\alpha_1 x},\ldots,x\mapsto e^{\alpha_n x})$ est $\mathbb{C}$ –libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

d. Soit $(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ des réels strictement positifs distincts.
Montrer que
$(x\mapsto\cos(\omega_1 x),x\mapsto\cos(\omega_2 x),\ldots,x\mapsto\cos(\omega_n x),x\mapsto\sin(\omega_1 x),\ldots,x\mapsto\sin(\omega_n x))$ est $\mathbb{R}$ –libre.

21. * : Soient F,G,H des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ de dimension $n.$ Dire (preuve à l'appui) si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux (faire des dessins).

a. Le complémentaire d'un hyperplan est une droite.

b. Si $F\cap G = G\cap H = H\cap F = \{0\}$ alors $\dim(F+G+H) = \dim F+\dim G+\dim H.$

c. Si H et K sont deux hyperplans de $\mathbb{E}$ alors $H\cup K\neq\mathbb{E}$.

d. Si P_1 et P_2 sont deux plans de $\mathbb{E},$ vérifiant $P_1\cap P_2 = \{0\}$ alors $\dim\mathbb{E}\geqslant 4$.

e. On suppose que F est un hyperplan ; alors 1 vecteur non nul du complémentaire de F dans $\mathbb{E}$ engendre nécessairement un supplémentaire de F.

f. On suppose que F est de dimension $n-2$; alors 2 vecteurs linéairement indépendants du complémentaire de F dans $\mathbb{E}$ engendrent nécessairement un supplémentaire de F.

22. :

a. Soient A,B,C trois ensembles finis, vérifier que

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

b. Soient F,G,H trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$, $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'égalité :

$$\dim(F+G+H) = \dim F+\dim G+\dim H-\dim F\cap G-\dim G\cap H-\dim F\cap H+\dim F\cap G\cap H$$

n'est pas toujours vérifiée, mais qu'elle l'est ssi $F\cap(G+H) = (F\cap G)+(F\cap H)$ (cf. exercice 4).

23. : Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^I; x_0\in I;\ F = \{f\in\mathbb{E}\ \ /\ \ f(x_0) = 0\}$

a. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

b. Montrer que l'ensemble G des fonctions constantes de I dans $\mathbb{R}$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{E}$. Qu'en déduit-on pour F ?

c. Quel est le projeté g d'une fonction $e\in E$ sur G parallèlement à F ? Faire une figure avec les courbes de e et g.

24. : Soit $\mathbb{E} = \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}); x_0\in\mathbb{R}\ ;F = \{f\in\mathbb{E}\ \ /\ \ f(x_0) = f'(x_0) = 0\}$

a. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

b. Montrer que l'ensemble G des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R},$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{E}$ et en déduire la codimension de F.

c. Quel est le projeté g de $e\in E$ sur G parallèlement à F ? Faire une figure avec les courbes de e et g.

25. : Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_p})$ une famille finie de $\mathbb{E}$.
Montrer qu'une sous-famille de $\mathcal{F}$ a un rang supérieur ou égal à $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ – nombre de vecteurs enlevés.

26. : Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension finie n ; F et G des sous-espaces de $\mathbb{E}$, avec $\dim F = p, \dim G = q$.

a. Montrer que : $p + q - n \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \min(p, q)$ et donner un exemple pour chaque cas d'égalité.

b. Plus généralement, si $(F_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ sont des sous-espaces de $\mathbb{E}$ avec $\dim F_i = n_i$ pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, montrer que :

$$\sum_{i=1}^{p} n_i - (p-1)n \leqslant \dim \bigcap_{i=1}^{p} F_i \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant p} (n_i)$$

ce qui peut s'écrire :

$$n - \sum_{i=1}^{p} \operatorname{codim} F_i \leqslant \dim \bigcap_{i=1}^{p} F_i \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant p} (\dim F_i)$$

Regarder par exemple le cas particulier d'une intersection d'hyperplans.

27. : Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls.

a. Soit $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ une équation linéaire homogène à n inconnues.
Montrer que l'ensemble des solutions est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

b. Déduire de l'exercice précédent et de la première question le fait que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de p équations à n inconnues est un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à $n - p$.